PT Programme de Colles
Semaine 12

Fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3), Courbes paramétrées du plan et de l'espace

- Limite en un point. Continuité en un point. Continuité globale.
- Vecteur dérivé en un point. Fonction dérivée.
- Dérivée d'une combinaison linéaire, d'une composée, d'un produit (produit scalaire et produit vectoriel)
- Fonction de classe $\mathcal{C}^k$. Dérivées successives d'une combinaison linéaire, d'un produit
- Formule de Taylor-Young. Développement limité d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage d'un point.
- Courbe paramétrée par une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.
- Tangente en un point $M(t_0)$.
- Point régulier, Vecteur tangent en un point régulier.
- Étude des courbes paramétrées du plan :
  — Étude locale en un point régulier ou stationnaire,
  — Tangente et position relative.
  — Définition géométrique des points d'inflexion et de rebroussement.
  — Branches infinies. Asymptotes, branches paraboliques.
  — Support d'une courbe paramétrée. Construction à partir du tableau de variations

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

- Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme en dimension quelconque. Équation aux éléments propres $f(x) = \lambda x$. Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.
- Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée. Équation aux éléments propres $AX = \lambda X$. Spectre d'une matrice carrée
- La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- Polynôme caractéristique d'une matrice carrée $\chi_A : x \mapsto \det(x\ I_n - A)$, Polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie
- Les valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.
- Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.
- Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale
- Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.
- Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E, si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de E.
- Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité.
- Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable. Cas où χ_f est scindé à racines simples.
- Traduction matricielle des résultats précédents relatifs aux endomorphismes.
- Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire. Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.
- Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. Traduction matricielle. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
- Expressions du déterminant et de la trace d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable en fonction de ses valeurs propres.
- Théorème spectral : Toute matrice symétrique réelle est orthogonalement diagonalisable